

Решение плоской задачи теории упругости в
тригонометрических рядах

Метод решения плоской задачи в полиномах имеет существенный недостаток – функция внешней нагрузки должна быть непрерывной по всей длине балки. Если на балку будет действовать сосредоточенная сила или распределенная нагрузка только на некотором участке балки, то решение задачи в полиномах станет невозможным, так как функция внешней нагрузки будет иметь разрывы и поэтому будет невозможно удовлетворить граничным условиям. В таком случае функцию напряжений можно представить в виде тригонометрического ряда

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \cos(\alpha_n x), \quad (1)$$

где Y_n – функция, зависящая только от y ;

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}; \quad (2)$$

n – целое число, L – длина балки в направлении оси x .

Покажем, что функция $\varphi(x, y)$ будет периодической по переменной x с периодом $2L$

$$\cos[\alpha(x_0 + 2L)] = \cos(\alpha x_0 + \alpha \cdot 2L) = \cos\left(\alpha x_0 + \frac{\pi n}{L} \cdot 2L\right) = \cos(\alpha x_0 + 2\pi n) = \cos(\alpha x_0)$$

Выясним, при каких условиях функция φ является бигармонической, т. е. удовлетворяет уравнению (6.8). Подсчитаем четвертые производные функции φ :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 Y \cos \alpha x;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 Y'' \cos \alpha x;$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = Y^{IV} \cos \alpha x.$$

Подставляя их в указанное уравнение, получаем

$$\alpha^4 Y \cos \alpha x - 2\alpha^2 Y'' \cos \alpha x + Y^{IV} \cos \alpha x = 0,$$

или

$$\cos \alpha x (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) = 0.$$

Это уравнение обращается в тождество при любых значениях аргумента x , если $Y(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0,$$

решение которого можно представить с помощью гиперболических функций:

$$Y = A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y. \quad (3)$$

Подставляя это решение в выражение функции φ , получим бигармоническую функцию в виде

$$\varphi = (x, y) = \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y).$$

Напомним определение гиперболических функций

$$\operatorname{ch}(\alpha x) = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(\alpha x) = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} \operatorname{ch}(x) = \operatorname{sh}(x), \quad \frac{d}{dx} \operatorname{sh}(x) = \operatorname{ch}(x).$$

Аналогично можно показать, что функция

$$\varphi(x, y) = \sin \alpha x (A'_n \operatorname{ch} \alpha y + B'_n y \operatorname{ch} \alpha y + C'_n \operatorname{sh} \alpha y + D'_n y \operatorname{sh} \alpha y)$$

также является бигармонической и может быть применена для решения плоской задачи.

Если числу n в соотношении (2) давать различные значения, то каждый раз будут получаться новые функции, отличающиеся значениями параметра α и постоянных A_n, B_n, C_n, D_n . Поэтому общее решение бигармонического уравнения (6.8) может быть представлено как сумма всех его возможных частных решений, т. е. в виде бесконечного ряда

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [& \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + \\ & + D_n y \operatorname{sh} \alpha y) + \sin \alpha x (A'_n \operatorname{ch} \alpha y + B'_n y \operatorname{ch} \alpha y + C'_n \operatorname{sh} \alpha y + \\ & + D'_n y \operatorname{sh} \alpha y)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Постоянные $A_n, B_n, \dots, C'_n, D'_n$ определяются из условий на контуре. Нагрузка на контуре должна быть разложена в тригонометрический ряд Фурье по синусам и косинусам.

С помощью функции напряжений (4), добавляя в случае необходимости степенные полиномы, можно получить решения для более широкого круга задач, чем с помощью только степенных полиномов. Среди них можно назвать задачу об изгибе балки-стенки, задачу о действии на пластинку нагрузок, распределенных вдоль контура по любому закону (в том числе сосредоточенной силы).

Решение в виде тригонометрического ряда по синусам впервые было предложено Файлоном. Аналогичное решение в тригонометрических рядах по косинусам (1) было предложено Рибьером.

Краткие сведения из теории рядов Фурье

Функция $q_0(x)$ разложима в интервале $[-L, L]$ в тригонометрический ряд Фурье:

$$q_0(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\alpha_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\alpha_n x),$$

где

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L q_0(x) dx; \\ a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L q_0(x) \cos(\alpha_n x) dx; \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L q_0(x) \sin(\alpha_n x) dx. \end{cases}$$

Здесь под функцией $q_0(x)$, будем понимать функцию, аппроксимирующую заданную внешнюю нагрузку.

В зависимости от вида симметрии возможны упрощения. Если функция $q_0(x)$ четная (нагрузка симметричная), то есть $q_0(-x) = q_0(x)$, то функция нагрузки разлагается в ряд по косинусам:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L q_0(x) dx; \\ a_n = \frac{2}{L} \int_0^L q_0(x) \cos(\alpha_n x) dx; \\ b_n = 0. \end{cases}$$

Если функция $q_0(x)$ нечетная (нагрузка кососимметричная), то есть $q_0(-x) = -q_0(x)$, то функция нагрузки разлагается в ряд по синусам:

$$\begin{cases} a_0 = 0; \\ a_n = 0; \\ b_n = \frac{2}{L} \int_0^L q_0(x) \sin(\alpha_n x) dx. \end{cases}$$

Расчет балки-стенки

Балкой-стенкой называется конструктивный элемент в виде балки, высота которой соизмерима с длиной перекрываемого пролета. На примере расчета неразрезной балки-стенки можно проиллюстрировать применение к решению плоской задачи тригонометрических рядов.

Такая балка-стенка изображена на рис. 1. Она опирается на ряд колонн, расположенных с одинаковым шагом $2l$, и несет нагрузку, равномерно распределенную по верхней грани. Собственный вес балки-стенки при расчете во внимание не принимается.

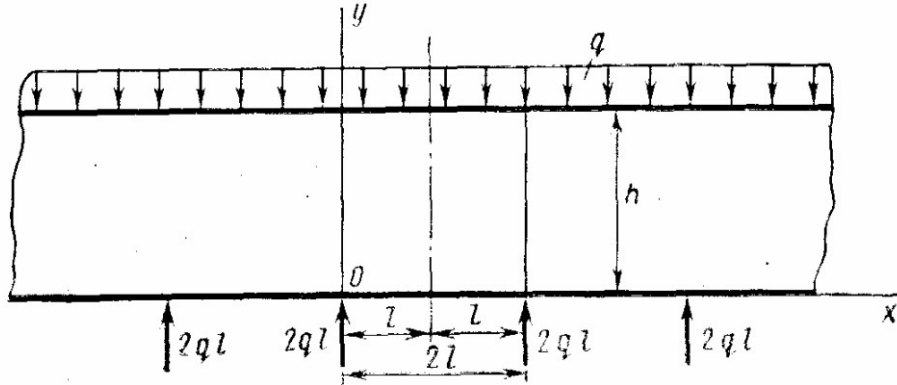


Рис. 1

Пусть балка-стенка имеет бесконечное число пролетов. Если исключить из рассмотрения крайние пролеты, то все остальные будут находиться в одинаковых условиях. В этом случае ось y , проходящая через ось колонны, является осью симметрии. Для выполнения условий симметрии функцию напряжений $\varphi(x, y)$ следует взять четной по отношению к переменной x , т. е. в формуле (4) необходимо сохранить только члены, содержащие $\cos \alpha x$:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y). \quad (a)$$

Попытки удовлетворить всем граничным условиям поставленной задачи с помощью функций напряжений (a) привели к выводу, что этой функции недостаточно и к ней следует добавить алгебраический полином второй степени. Сохраняя в полиноме только четные члены по отношению к переменной x , получаем видоизмененную функцию напряжений для решения поставленной задачи:

$$\varphi(x, y) = a_2 x^2 / 2 + c_2 y^2 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y).$$

Дифференцируя эту функцию согласно формулам (6, 7) и учитывая, что объемные силы равны нулю, находим составляющие напряжений:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_x &= c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cos \alpha x [A_n \alpha \operatorname{ch} \alpha y + B_n (2 \operatorname{sh} \alpha y + \\
 &+ \alpha y \operatorname{ch} \alpha y) + C_n \alpha \operatorname{sh} \alpha y + D_n (2 \operatorname{ch} \alpha y + \alpha y \operatorname{sh} \alpha y)]; \\
 \sigma_y &= a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + \\
 &+ C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y); \\
 \tau_{xy} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x [A_n \alpha \operatorname{sh} \alpha y + B_n (\operatorname{ch} \alpha y + \\
 &+ \alpha y \operatorname{sh} \alpha y) + C_n \alpha \operatorname{ch} \alpha y + D_n (\operatorname{sh} \alpha y + \alpha y \operatorname{ch} \alpha y)],
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где по-прежнему $\alpha = n\pi/l$.

Полученные формулы пригодны для всех пролетов рассматриваемой балки-стенки, так как от прибавления к абсциссе x длины $2l$ функция косинуса не меняется. Следовательно, в соответствующих точках всех пролетов возникают одинаковые напряжения.

Для определения постоянных, входящих в формулы (6), рассмотрим граничные условия. Два условия можно записать для верхней грани. Так как эта грань несет нормальную сжимающую нагрузку интенсивностью q , то

$$\text{при } y = h \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (в)$$

Нижняя грань свободна от нагрузки во всех точках, кроме тех, которые лежат на осях колонн. В них приложены опорные реакции, рассматриваемые как сосредоточенные силы.

Итак, имеем еще два условия:

$$\text{при } y = 0 \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (г)$$

Для включения в граничные условия опорных реакций на нижней грани рассмотрим равновесие части балки в пределах одного пролета, отсеченной горизонтальной плоскостью на произвольной высоте y (рис. 2).

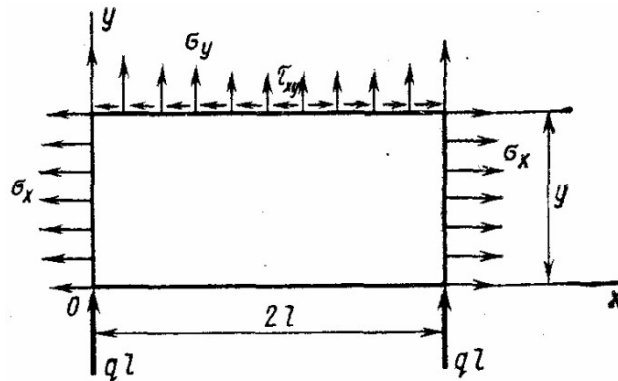


Рис. 2

Из суммы проекций на ось y всех сил, действующих на выделенную часть балки, следует пятое условие:

$$\int_0^{2l} \sigma_y dx = -2ql. \quad (d)$$

Наконец, шестое условие получаем из рассмотрения вертикальных сечений балки. По характеру внешних нагрузок усилия в них сводятся к изгибающему моменту и поперечной силе. Поскольку продольная сила отсутствует, сумма проекций всех сил на ось x равна нулю:

$$\int_0^h \sigma_x dy = 0. \quad (e)$$

Подставляя в условия (в)—(е) составляющие напряжений (б), после интегрирования и приведения подобных членов получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha h + B_n h \operatorname{ch} \alpha h + C_n \operatorname{sh} \alpha h + \\ + D_n h \operatorname{sh} \alpha h) &= -q; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x [A_n \alpha \operatorname{sh} \alpha h + B_n (\operatorname{ch} \alpha h + \alpha h \operatorname{sh} \alpha h) + \\ + C_n \alpha \operatorname{ch} \alpha h + D_n (\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h \operatorname{ch} \alpha h)] &= 0; \\ a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x (A_n) &= 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \sin \alpha x (B_n + C_n \alpha) &= 0; \\ a_2 \cdot 2l &= -2ql; \\ c_2 h + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \alpha x [A_n \alpha \operatorname{sh} \alpha h + B_n (\operatorname{ch} \alpha h + \alpha h \operatorname{sh} \alpha h - 1) + \\ + C_n \alpha (\operatorname{ch} \alpha h - 1) + D_n (\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h \operatorname{ch} \alpha h)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

Из пятого уравнения (ж) находим $a_2 = -q$. С учетом этого результата первое уравнение принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha h + B_n h \operatorname{ch} \alpha h + C_n \operatorname{sh} \alpha h + D_n h \operatorname{sh} \alpha h) = 0.$$

Для того, чтобы суммы членов ряда, не зависящих друг от друга равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы каждый член ряда равнялся нулю. Поэтому

$$A_n \operatorname{ch} \alpha h + B_n h \operatorname{ch} \alpha h + C_n \operatorname{sh} \alpha h + D_n h \operatorname{sh} \alpha h = 0. \quad (3)$$

Аналогично из второго уравнения (ж) получаем

$$A_n \alpha \operatorname{sh} \alpha h + B_n (\operatorname{ch} \alpha h + \alpha h \operatorname{sh} \alpha h) + C_n \alpha \operatorname{ch} \alpha h + D_n (\operatorname{sh} \alpha h + \alpha h \operatorname{ch} \alpha h) = 0, \quad (и)$$

а из четвертого —

$$B_n + C_n \alpha = 0. \quad (к)$$

Согласно формулам (и) и (к), выражение, стоящее в фигурных скобках шестого уравнения (ж), равно нулю и, следовательно,

$$c_2 = 0.$$

Третье из уравнений (ж) после подстановки значения a_2 принимает такой вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha^2 \cos \alpha x = -q. \quad (л)$$

Для его решения нагрузку q разложим в ряд Фурье, используя известную из математики формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\psi = -1/2,$$

которая действительна при $0 < \psi < 2\pi$. Таким образом,

$$q = - \sum_{n=1}^{\infty} 2q \cos \alpha x.$$

Подставляем этот ряд в формулу (л):

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \alpha^2 \cos \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} 2q \cos \alpha x,$$

откуда находим $A_n = 2q/\alpha^2$.

После этого, решая совместно систему уравнений (з)—(к), находим остальные постоянные:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2q}{\alpha} \frac{\operatorname{sh} \alpha h \operatorname{ch} \alpha h + \alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2}; \\ C_n &= -\frac{2q}{\alpha^2} \frac{\operatorname{sh} \alpha h \operatorname{ch} \alpha h + \alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2}; \\ D_n &= -\frac{2q}{\alpha} \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha h}{\operatorname{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что дроби $\frac{\text{sh } \alpha h \text{ ch } \alpha h + \alpha h}{\text{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2}$ и $\frac{\text{sh}^2 \alpha h}{\text{sh}^2 \alpha h - \alpha^2 h^2}$ для высоких балок-стенок при высоте h , имеющей порядок $2l$, близки к единице, получаем:

$$B_n = 2q/\alpha; \quad C_n = -2q/\alpha^2; \quad D_n = -2q/\alpha.$$

Подставляя значения найденных постоянных в формулы (б), находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2q \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha y - 1) e^{-\alpha y} \cos \alpha x; \\ \sigma_y &= -q - 2q \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha y + 1) e^{-\alpha y} \cos \alpha x; \\ \tau_{xy} &= -2q \sum_{n=1}^{\infty} \alpha y e^{-\alpha y} \sin \alpha x. \end{aligned} \right\} \quad (\text{м})$$

Здесь гиперболические функции заменены экспоненциальными согласно зависимости

$$\text{ch } \alpha y - \text{sh } \alpha y = e^{-\alpha y}.$$

Ряды в формулах (м) сходятся очень быстро во всех точках, за исключением тех, которые находятся вблизи нижнего края (при малых значениях y).

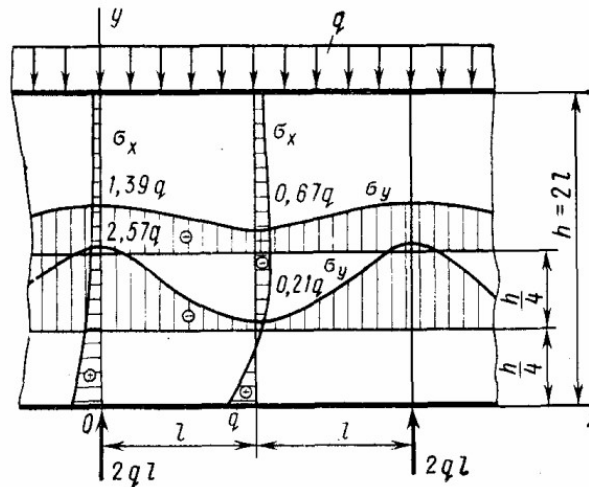


Рис. 3

Результаты вычислений для балки-стенки высотой $h = 2l$ приведены на рис. 3 в виде эпюр нормальных напряжений σ_x для двух вертикальных сечений (на опоре и посередине пролета) и нормальных напряжений σ_y для двух горизонтальных сечений. Нетрудно убедиться, что эти эпюры заметно отличаются от эпюр, получаемых в сопротивлении материалов.